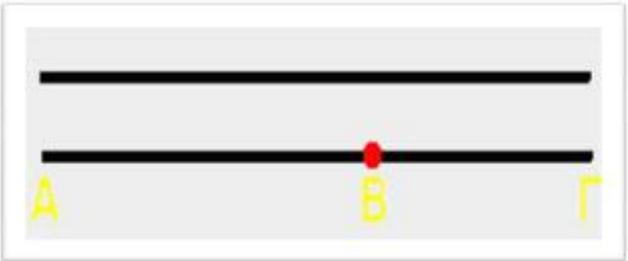
Ο ΧΡΥΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ Φ

Ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος που διατύπωσε τον μαθηματικό ορισμό της αναλογίας χρησιμοποιώντας δύο ευθύγραμμα τμήματα.

Η σκέψη του ήταν πως αν υπάρχει ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα σημείο τομής να το τέμνει ασύμμετρα έτσι ώστε το μήκος του μεγαλύτερου τμήματος προς όλο το μήκος του τμήματος να είναι ίσο με το μήκος του μεγαλύτερου τμήματος προς το μήκος του μικρότερου,τότε ο λόγος τους φανερώνει κάποιους είδους αναλογία.



Υπέθεσε ότι υπάρχει ένα τμήμα ΑΒ. Τέμνοντάς το σε δύο μέρη τα οποία δεν είναι ίσα μεταξύ τους στο σημείο Γ, δημιουργούνται δύο ευθύγραμμα τμήματα.

Έστω ότι ΑΓ&ΒΓ τότε ΑΒ/ΑΓ=ΑΓ/ΒΓ. Το σημείο τομής Γ δίνει την χρυσή αναλογία γιατί ο λόγος των ΑΒ/ΑΓ και ΑΓ/ΒΓ δίνει αποτέλεσμα 1.618 που είναι και ο χρυσός αριθμός φ. Ο αριθμός αυτός φανερώνει την αρμονία που διακατέχει ένα αντικείμενο το οποίο εξετάζεται.

Είναι ο μοναδικός αριθμός για τον οποίο ισχύει η σχέση φ =φ+1 και φ=1+√5/2.

Η κυριότερη διαπίστωση είναι ότι το αποτέλεσμα είναι άρρητος αριθμός. Αυτό δείχνει ότι δεν είναι δυνατόν ένα μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα να χωράει σε ένα μεγαλύτερό του ακριβώς.

Συνεπώς υπάρχουν και κάποιοι αριθμοί που η λειτουργία τους είναι έξω από το ανθρώπινα αντιληπτό και πεδίο ορισμού τους είναι το ιδεατό.

Έτσι ανακαλύφθηκε και η έννοια της ιδέας,την οποία ερεύνησε ο Πλάτων και διατύπωσε την θεωρία των ιδεών.

Είναι φανερό ότι ήξεραν τα πάντα για την χρήση του αριθμού φ γιατί και το πεντάγραμμα που ήταν το σύμβολο της σχολής των πυθαγορείων υπόκειται σε αυτή την αναλογία.

Ο «χρυσός» αριθμός Φ

Ο Πυθαγόρας πρώτος παρατήρησε ότι τα φυτά και τα ζώα δεν μεγαλώνουν τυχαία, αλλά σύμφωνα με ακριβείς μαθηματικούς κανόνες. Δεν είναι τυχαία δηλαδή τα όμορφα σχέδια των λουλουδιών.

Έτσι ανακαλύφθηκε και η έννοια της ιδέας,την οποία ερεύνησε ο Πλάτων και διατύπωσε την θεωρία των ιδεών.

Είναι φανερό ότι ήξεραν τα πάντα για την χρήση του αριθμού φ γιατί και το πεντάγραμμα που ήταν το σύμβολο της σχολής των πυθαγορείων υπόκειται σε αυτή την αναλογία.

Ο «χρυσός» αριθμός Φ

Ο Πυθαγόρας πρώτος παρατήρησε ότι τα φυτά και τα ζώα δεν μεγαλώνουν τυχαία, αλλά σύμφωνα με ακριβείς μαθηματικούς κανόνες. Δεν είναι τυχαία δηλαδή τα όμορφα σχέδια των λουλουδιών.

Οι αρχαίοι Έλληνες βρήκαν ότι τα σχέδια των λουλουδιών βασίζονται σε γεωμετρική αναλογία. Επίσης η ακολουθία κάνει την εμφάνισή της στη διάταξη των φύλων γύρω από το μίσχο.

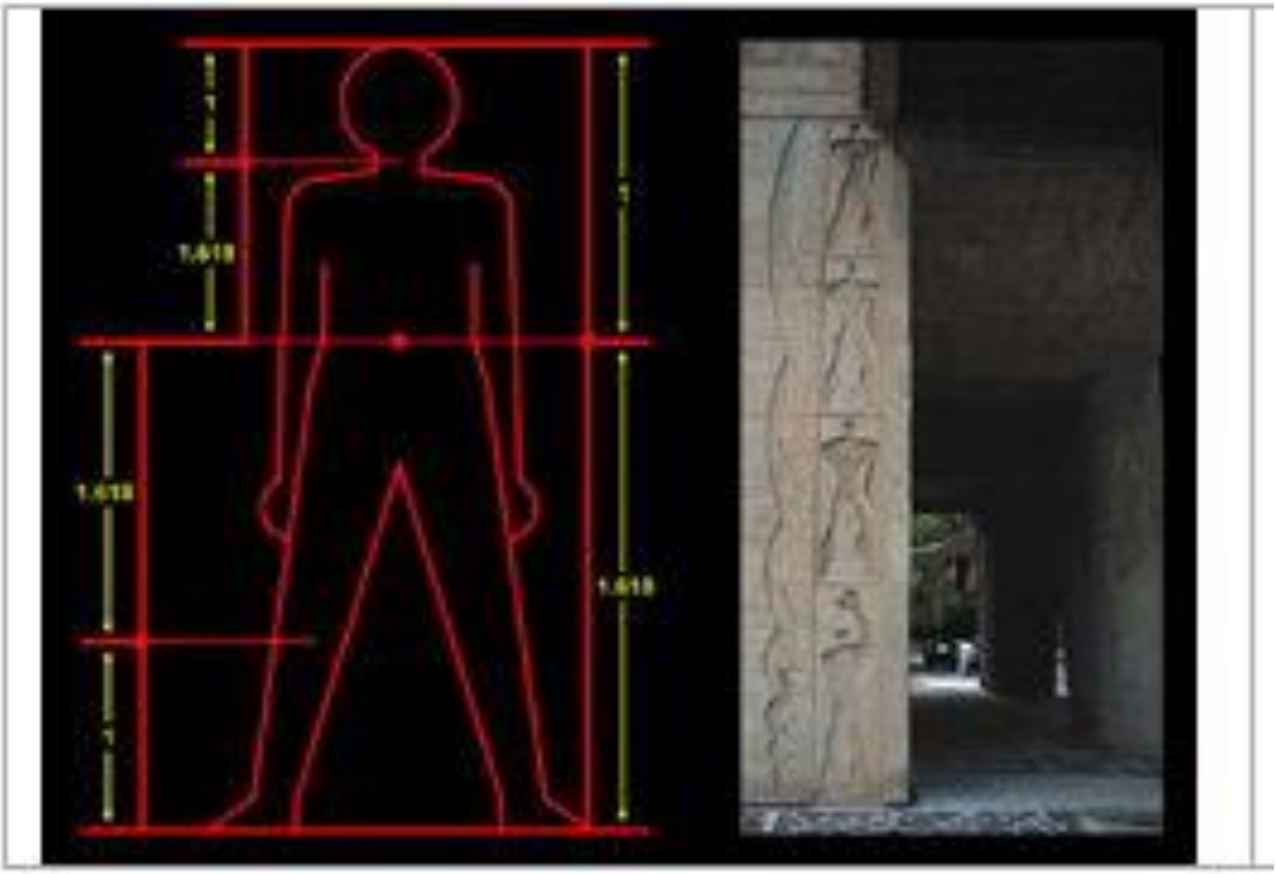
Εμφανίζεται ακόμα και στην ανάπτυξη των βελόνων αρκετών ειδών ελάτου, καθώς επίσης και στη διάταξη των πετάλων στις μαργαρίτες και τα *ηλιοτρόπια. Μερικά κωνοφόρα δένδρα παρουσιάζουν τη σειρά αριθμών στη δομή της επιφάνειας των κορμών τους, ενώ τα φοινικόδεντρα στους δακτυλίους των κορμών τους.*

A	B	B / A
2	3	1.5
3	5	1.666666666...
5	8	1.6
8	13	1.625
13	21	1.615384615...
...	...	...
144	233	1.618055556...
233	377	1.618025751...
...	...	...

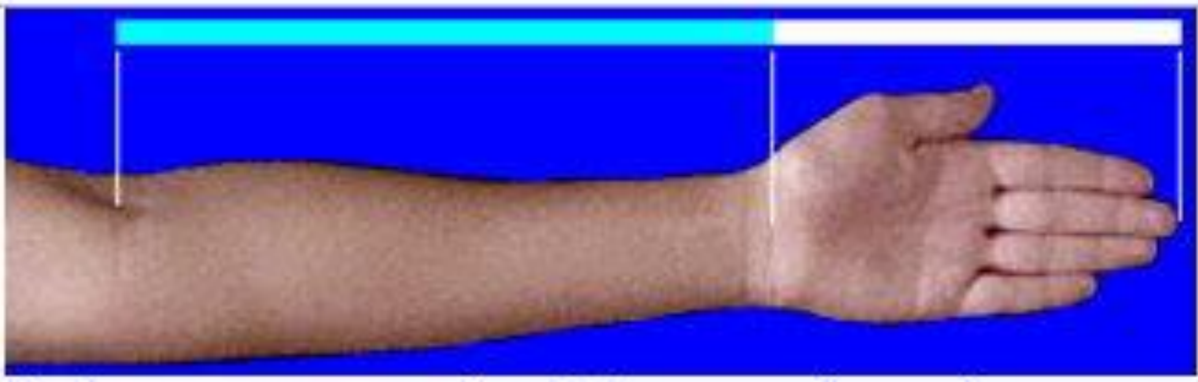
Με τις πράξεις που έκανε ο Ιταλός μαθηματικός Fibonacci, ο οποίος ήταν πολύ γνωστός στην εποχή του και αναγνωρίζεται και σήμερα, βρήκε ότι το κλειδί της ομορφιάς είναι η αναλογία 1 προς 1,618, ο αριθμός Φ.

Για παράδειγμα, η σχέση από το πάτωμα ως τον ομφαλό και από εκεί στο κεφάλι θα είναι 1 προς Φ, αν οι αναλογίες είναι ιδανικές.

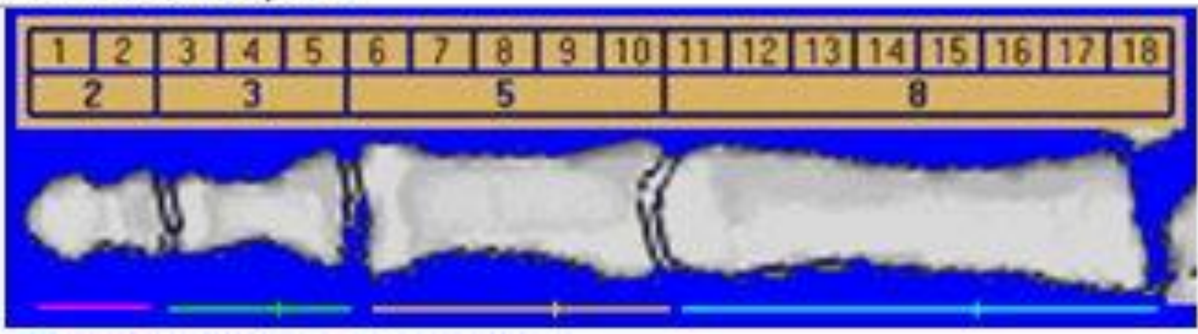
Σχέση των αναλογιών στο σώμα μας και την χρυσή τομή.



Ο αρχιτέκτονας Le Corbusier (1887-1965) κατασκεύασε μια κλίμακα αναλογιών που ονόμασε Le Modulor, η οποία βασίζεται στο ανθρώπινο σώμα. Σύμφωνα με αυτή, ο ομφαλός διαιρεί το ανθρώπινο σώμα σε λόγο χρυσής τομής.



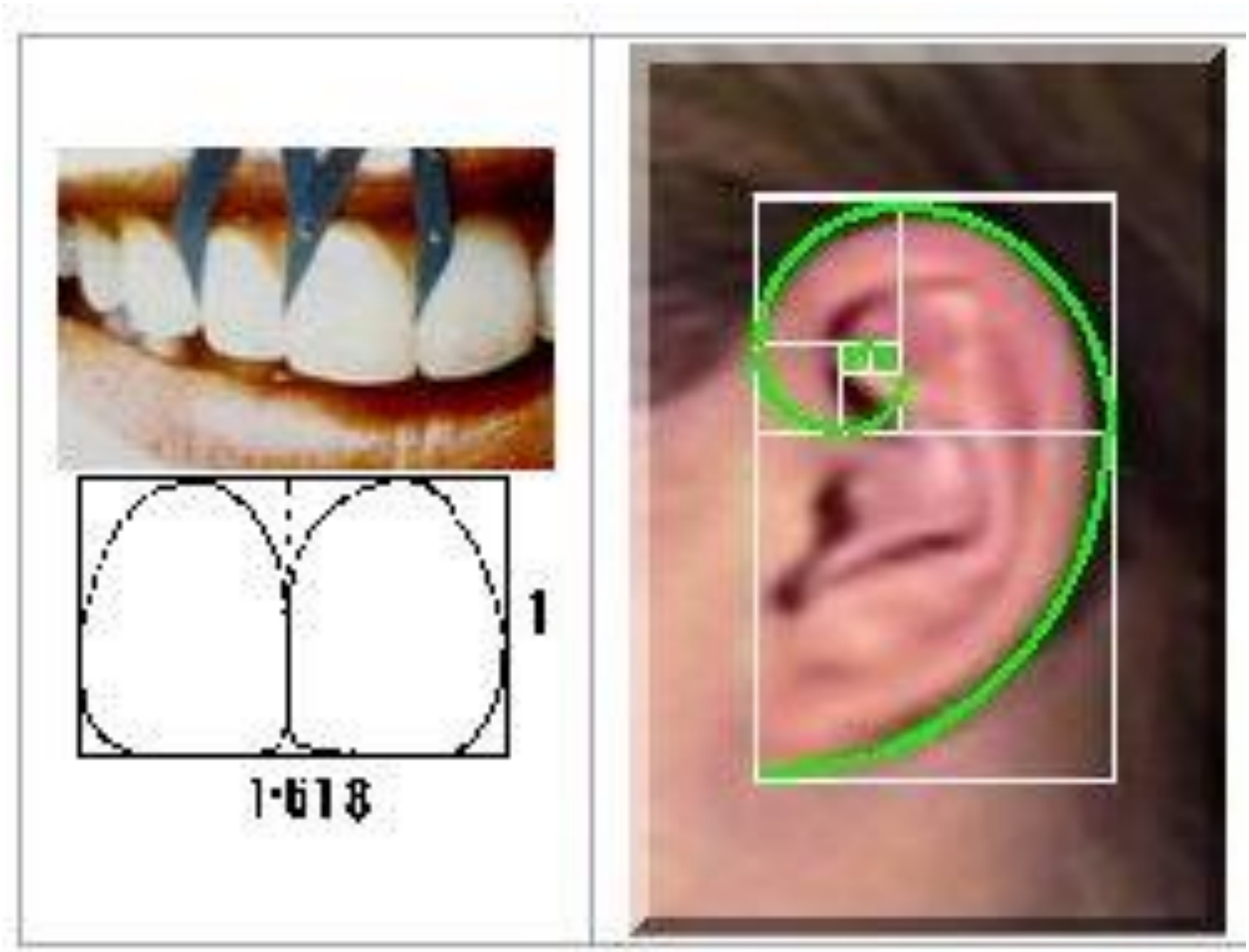
διαίρεση του χεριού σε λόγο χρυσής τομής από τον καρπό



φάλαγγες δείκτη χεριού

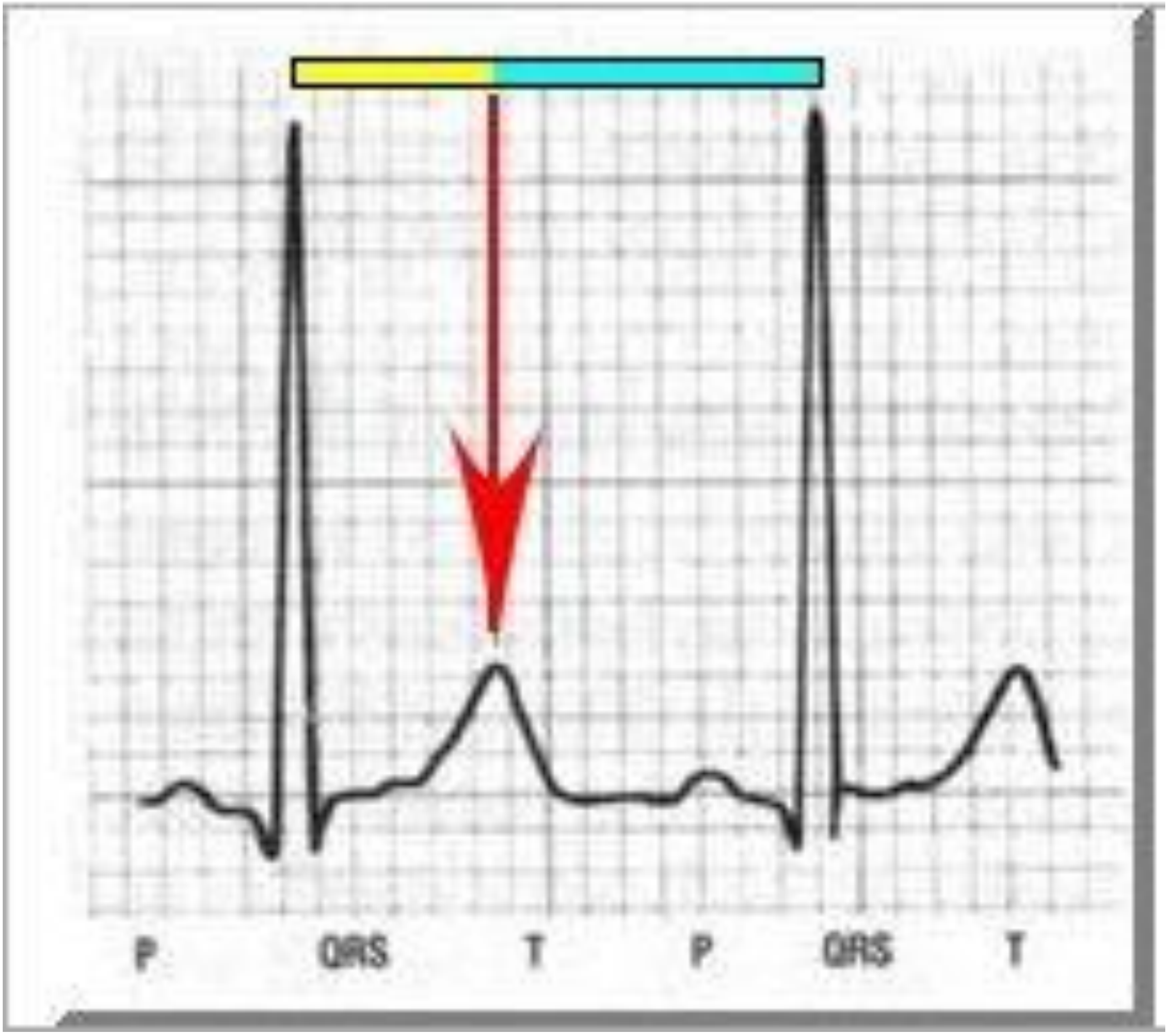
Προχωρώντας σε λεπτομε-ρέστερα σημεία του ανθρωπίνου σώματος μπορούμε να παρα-τηρήσουμε και άλλες διαιρέσεις σε χρυσό λόγο.

Για παράδειγμα ο καρπός διαιρεί το χέρι από τον αγκώνα και κάτω σε λόγο χρυσής τομής, ενώ αν παρα-τηρήσουμε τις φάλαγγες του δείκτη μας, φαίνεται πως καθεμιά βρίσκεται σε χρυσή αναλογία με την επόμενή της. (παρατηρήστε τους αριθμούςFibonacci στις μετρήσεις)



Η χρυσή αναλογία, όπως φαίνεται και στις διπλανές φωτογραφίες, εμφανίζεται στις αναλογίες των δοντιών μας, του αυτιού μας αλλά και σε πολλές άλλες λεπτομέρειες του προσώπου μας όπως είναι τα χείλη, τα μάτια ή ακόμα και η μύτη.

Προσέξετε ιδιαιτέρως την χρυσή σπείρα που εμφανίζεται στο εικονιζόμενο αυτί.



Το σχεδιάγραμμα δίπλα είναι ένα καρδιογράφημα σε στιγμή ηρεμίας. Για τους γιατρούς είναι μία ιδιαίτερα ικανοποιητική ένδειξη όταν το διάστημα μεταξύ δύο οξέων επαρμάτων R διαιρείται σε λόγο χρυσής τομής από ένα έπαρμα T. (το κόκκινο βέλος στο διάγραμμα)

Επίσης, το πλάτος του στόματος είναι Φ φορές το πλάτος της μύτης.

Ο Χρυσός αριθμός θεωρούταν από τους αρχαίους Έλληνες ως η θεϊκή αναλογία όπου η εφαρμογή του σε καλλιτεχνικά δημιουργήματα και

κατασκευές οδηγούσε σε «άριστα» και «ωραία» αποτελέσματα.

Μετά από πάρα πολλά χρόνια ο Fibonacci ανακάλυψε μία ακολουθία αριθμών που είχαν την ιδιότητα να εμφανίζουν την χρυσή αναλογία.

Είναι η ακολουθία α =α +α . Για να προκύψει νέος αριθμός θα πρέπει να προστεθούν μεταξύ τους οι δύο προηγούμενοι με μοναδικό περιορισμό ότι για τον πρώτο αριθμό της ακολουθίας (α)δεν ισχύει η σχέση και για τον δεύτερο ισχύει α =2α .

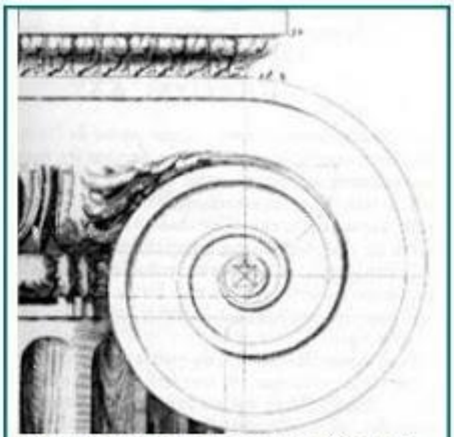
Ξεκινώντας από το 1 η ακολουθία είναι 1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657 και συνεχίζει επ' άπειρον.

Αν χ=α /α τότε παρατηρείται το εξής:Για α =1 χ=1/1=1,για α =1 και α =2 χ=2/1=2,για α =2 και α =3 χ=3/2=1.5, για α =3 και α =5 χ=5/3=1.67, για α =5 και α =8 χ=8/5=1.6 και από εκεί και πέρα για οποιαδήποτε διαίρεση μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας όσο η ακολουθία προχωρά τόσο το αποτέλεσμα συγκλίνει όλο και με μεγαλύτερη ακρίβεια στον χρυσό αριθμό, το 1.618.

Ομοίως και για οποιαδήποτε άλλη ακολουθία με σημείο εκκίνησης οποιονδήποτε αριθμό.

ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ Φ

Το Φ στην αρχιτεκτονική



Χρυσή σπείρα σε αρχαίο ελληνικό κιονόκρανο.

Η πρόσοψη του Παρθενώνα αποτελεί ένα παράδειγμα χρήσης της χρυσής τομής(Φ) στην αρχιτεκτονική. Δεν είναι γνωστό όμως αν οι αναλογίες δόθηκαν διαισθητικά ή με γνώση του αριθμού Φ.

Ο τριγωνισμός, μια άλλη μέθοδος συγκρότησης ρυθμικών καμβάδων με βάση ορισμένα προνομιούχα τρίγωνα, γνώρισε τη μεγαλύτερη διάδοσή του τον περασμένο αιώνα.

Αυτά είναι: (1)το πυθαγόρειο, δηλαδή το ορθογώνιο με σχέση πλευρών 3:4:5, (2) το αιγυπτιακό, δηλαδή το ισοσκελές με αναλογία βάσης προς ύψος 8:5, (3) το ισοσκελές με γωνία κορυφής 36 μοίρες, που αποτελεί τη μονάδα του

κανονικού δεκαγώνου, και έχει σχέση πλευράς προς βάση Φ (1,618, ο γνωστός χρυσός αριθμός) και τέλος (4) το ισόπλευρο, που αποτελεί τη μονάδα του εξαγώνου.

Τέτοιες μεθόδους επαλήθευσης συναντά κανείς στα αρχιτεκτονικά έργα του μοντέρνου κινήματος, Le Corbusier, Bauhaus κλπ.

Το Φ στην τέχνη

Αργότερα ο Leonardo Da Vinci ζωγράφισε το πρόσωπο της Mona Lisa ώστε αυτό να χωράει τέλεια σε ένα χρυσό ορθογώνιο και δόμησε τον υπόλοιπο πίνακα γύρω από το πρόσωπο χωρίζοντάς τον επίσης σε χρυσά ορθογώνια.

Κατά την Αναγέννηση οι καλλιτέχνες άρχισαν να επιστρέφουν στα κλασσικά θέματα της αρχαιότητας για τις εμπνεύσεις τους και τις τεχνικές τους.

Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να αναφέρουμε τους Michelangelo (1475-1564) καιRaphael (1483-1530) οι οποίοι επανέφεραν στις συνθέσεις τους την χρυσή τομή.

Ο ομφαλός διαιρεί το σώμα του Δαβίδ του Michelangelo σε λόγο χρυσής τομής.

Η πιο πρόσφατη αναζήτηση για μία «γραμματική» στην τέχνη οδήγησε μοιραία τους σύγχρονους καλλιτέχνες στην χρήση της χρυσής τομής.

Η Παρέλαση του Γάλλου νέο-ιμπρεσιονιστή καλλιτέχνη Seurat (1859 – 1891), που χαρακτηρίζεται από το γνωστό του στυλ με τις άπειρες κουκκίδες, περιέχει πλήθος παραδειγμάτων χρυσών αναλογιών.

Σύμφωνα με έναν εμπειρογνώμονα τέχνης, ο Seurat «επιτέθηκε σε κάθε καμβά του με τη χρυσή αναλογία».

Τα χρυσά ορθογώνια είναι πολύ εμφανή στους Λουόμενούς του.

Ο Μυστικός Δείπνος του Salvador Dali (1904-1989) πλαισιώνεται από ένα χρυσό ορθογώνιο.

Χρυσοί λόγοι χρησιμοποιήθηκαν για να καθορίσουν την θέση κάθε φιγούρας

ενώ ο θόλος του δωματίου σχηματίζεται από τις έδρες κανονικού δωδεκάεδρου που όπως είδαμε είναι ένα από τα στερεά που συνδέεται άμεσα με την χρυσή τομή.

Μουσική

Να αναφέρουμε τέλος πως και η μουσική δεν έμεινε ανεπηρέαστη από την χρυσή τομή.

Αγνοούμε όμως αν αυτό έγινε συνειδητά ή ασυνείδητα.

Παρατηρούμε και εδώ στα έργα των μεγάλων συνθετών όπως του Μότσαρτ ή του Μπετόβεν να υπάρχει μία διαίρεση των συνθέσεων σε λόγους χρυσής τομής.

Για να το κατανοήσουμε αυτό καλύτερα, ας δούμε ένα παράδειγμα από την Πέμπτη συμφωνία του Μπετόβεν:

Το περίφημο μοτίβο της διαιρεί την πρώτη πράξη, όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχεδιάγραμμα, σε λόγο χρυσής τομής. Τα μέτρα που αναφέρονται είναι μουσικά μέτρα.

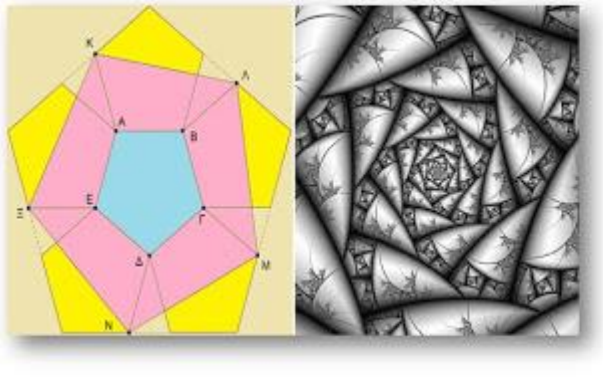
Μοτίβο 5 μέτρα	372 μέτρα	Μοτίβο 5 μέτρα	228 μέτρα	Μοτίβο 5 μέτρα
X			Y	

Βλέπουμε την πρώτη πράξη να αποτελείται από το μοτίβο (5 μέτρα), ένα μουσικό τμήμα 372 μέτρα, ξανά το μοτίβο, ένα τμήμα 228 μέτρα και ολοκληρώνεται με το μοτίβο. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον λόγο του Χ μουσικού τμήματος προς το Υ, θα έχουμε:

1. $X = 372 + \text{μοτίβο} = 372 + 5 = 377$
2. $Y = 228 + \text{μοτίβο} = 228 + 5 = 233$
3. $X/Y = 233 / 377 = 1.618$ (που είναι ο λόγος χρυσής τομής.)

Ο Mozart διαίρεσε μεγάλο αριθμό από τις σονάτες του σε δύο μέρη, η χρονική αναλογία των οποίων αντιστοιχεί στη χρυσή τομή, τον αριθμό φ, αν και υπάρχει σημαντική διχογνωμία για το κατά πόσο αυτό έγινε σκόπιμα.

Το Φ στη Γεωμετρία των Fractals

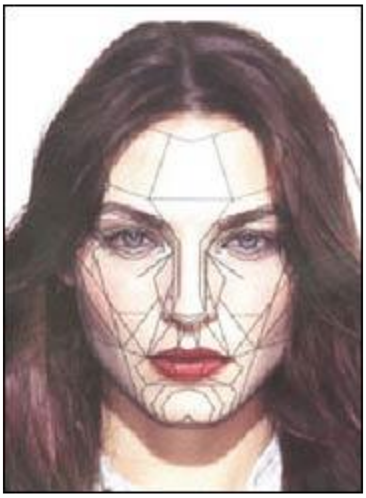


Ένας καλλιτέχνης του 15ου αιώνα που παρήγαγε ένα fractal αντικείμενο. Θεωρούμε ένα κανονικό πεντάγωνο και στην κάθε πλευρά του ας προσαρτήσουμε από άλλο ένα ίδιο κανονικό πεντάγωνο.

Με τον τρόπο αυτόν δημιουργούνται μέσα έξι νέα πεντάγωνα στα οποία εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία λαμβάνουμε ένα fractal απίστευτο για την εποχή του.

Από υπολογισμούς μπορούμε να δούμε ότι ο λόγος των πλευρών κάθε ισοσκελούς τριγώνου βρίσκεται στη χρυσή τομή.

Το Φ στη Βίβλο του Ισλάμ



Η λέξη Κοράνι, πιο σωστά στα Αραβικά Κουράν - Qur'an, προέρχεται από το ρήμα κάρα'α - qara'a που σημαίνει, απαγγέλλω κι αποτελείται από 114 κεφάλαια (Σούρα).

*Ο αριθμός 114 είναι διαιρετέος με το 19, ήτοι 19*6=114.*

Το 114 προκύπτει από τη διαίρεση του κύκλου με το π, ήτοι 360/π, όπου π=3,14159 και το 19 εκτός του ότι είναι ο Μετωνικός Αριθμός, προκύπτει επίσης σαν δεκαπλάσιο του π/Φ, όπου Φ=1,618034

Το Φ στον άνθρωπο

Το ανθρώπινο σώμα έχει δομηθεί και αναπτύσσεται σε αναλογίες Φ.

Δεν είναι τυχαίο ότι πολλές «ανατολίτικες θρησκείες» και κινήματα στα πλαίσια της διδασκαλίας τους για διαλογισμό και την «αυτοσυγκέντρωση και στο λεγόμενο «γιόγκα» η στάση του ανθρώπινου σώματος γίνεται κατά αυτό τον τρόπο έτσι ώστε τα «κεντρικά - κομβικά» σημεία του σώματος να βρίσκονται σε αναλογίες Φ.

Αν θέλει κανείς να δει ένα χρυσό ορθογώνιο αρκεί να κοιτάξει μια πιστωτική κάρτα το σχήμα της οποίας είναι ακριβώς αυτό.

Τέλος υπάρχουν καταγραφές που μιλούν για την ύπαρξη του Φ στην δομή του DNA.

Παρθενώνας: Χαρακτηριστικό παράδειγμα Αρχιτεκτονικής όπου συναντάται ο λόγος χρυσής τομής στις αναλογίες των πλευρών του.

Η χρήση του αριθμού φ στην αρχαιότητα είναι εντυπωσιακή. Στον Παρθενώνα από τα αετώματα και τα σκαλίσματα σε αυτά μέχρι τα κιονόκρανα, στο αρχαίο θέατρο της Επιδαύρου, σε όλα τα αγάλματα, στις Πυραμίδες της Αιγύπτου που ακολουθούν την δομή ισοσκελούς τριγώνου.

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήταν οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν τα Μαθηματικά στην τέχνη.

Είναι σχεδόν βέβαιο ότι απέδιδαν μαγικές ιδιότητες στην χρυσή τομή – χρυσό λόγο και τους έκαναν χρήση στο χτίσιμο των μεγάλων πυραμίδων.

Εάν τμήσουμε κάθετα την μεγάλη πυραμίδα της Γκίζας, θα πάρουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το ονομαζόμενο Αιγυπτιακό Τρίγωνο.

Ο λόγος του ύψους της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας (υποτείνουσα του τριγώνου) προς την απόσταση της πλευράς από το κέντρο (μισή πλευρά της βάσης) είναι 1,61804… που διαφέρει από τον αριθμό στο πέμπτο δεκαδικό ψηφίο.

Αυτό σημαίνει ότι αν η πλευρά της βάσης είναι 2 μονάδες μήκους, τότε το ύψος ενός από τα τέσσερα τρίγωνα που απαρτίζουν την παράπλευρη επιφάνεια της πυραμίδας είναι, ενώ το ύψος της πυραμίδας είναι Ö, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχεδιάγραμμα.